M - Soustavy rovnic

Určeno jako shrnující učební text pro třídy 2SA, 2SB.

VARIACE

1

◈ **Řešení soustav rovnic**

Soustavy rovnic

Soustava rovnic je zápis dvou nebo více rovnic, které musí platit současně.

V soustavě rovnic se může vyskytovat různý počet neznámých. My se zaměříme na takové soustavy rovnic, kde počet neznámých odpovídá počtu rovnic v soustavě (tedy budeme řešit např. soustavu dvou rovnic o dvou neznámých nebo soustavu třech rovnic o třech neznámých, apod.)

Soustavy rovnic můžeme řešit různými metodami - např.:

- metodou dosazovací
- metodou sčítací
- metodou, která kombinuje metodu sčítací a dosazovací
- metodou grafickou
- pomocí matic, resp. determinantů

Zatím se omezíme na první dvě z uvedených metod.

Řešení soustav rovnic metodou dosazovací

Tento způsob řešení je založen na postupu, kdy z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a tu pak dosadíme do zbývajících rovnic soustavy. Pokud byla zadána soustava dvou rovnic, pak už nyní řešíme jednu rovnici o jedné neznámé. Pokud původní soustava obsahovala tři nebo více rovnic, postup vyjádření neznámé opakujeme.

Metoda dosazovací je vhodná tehdy, pokud u rovnic v základním tvaru (tj. u rovnic, které dostaneme po odstranění závorek a zlomků a následném sloučení členů) je alespoň u jedné neznámé v některé z rovnic koeficient 1 nebo (-1). Lze ji ale použít i jindy.
Metota dosazovací se dále používá tehdy, je-li zadána soustava jedné lineární a jedné kvadratické rovnice. Takovými se ale budeme zabývat později.
Metoda dosazovací se s úspěchem dá použít i při řešení soustav třech nebo více rovnic.

Ukázkové příklady:

Příklad 1:

Řešte soustavu rovnic:

$x + y = 3$
$\underline{x - y = -1}$
$x = 3 - y$
$(3 - y) - y = -1$
$3 - y - y = -1$
$-2y = -4$
$y = 2$

$x = 3 - 2$
$x = 1$

Výsledek zapíšeme: $[x; y] = [1; 2]$

Zkouška:

$L_1 = 1 + 2 = 3$
$P_1 = 3$

$L_2 = 1 - 2 = -1$
$P_2 = -1$
$L_1 = P_1$ $L_2 = P_2$

Příklad 2:

Řešte soustavu rovnic:

2 . (x + y) - 5 . (y - x) = 17
3 . (x + 2y) + 7 . (3x + 5y) = 7

Řešení:
2 . (x + y) - 5 . (y - x) = 17
3 . (x + 2y) + 7 . (3x + 5y) = 7
2x + 2y - 5y + 5x = 17
3x + 6y + 21x + 35y = 7
7x - 3y = 17
24x + 41y = 7

$$x = \frac{17 + 3y}{7}$$
$$24.\frac{17+3y}{7} + 41y = 7$$
$$\frac{408 + 72y}{7} + 41y = 7$$

408 + 72y + 287y = 49
359y = -359
y = -1

x = 2

Výsledek zapíšeme [x; y] = [2; -1]

Zkouška:

$L_1 = 2 . [2 + (-1)] - 5 . (-1 - 2) = 2 - 5 . (-3) = 17$
$P_1 = 17$
$L_2 = 3 . [2 + 2.(-1)] + 7 . [3 . 2 + 5 . (-1)] = 3 . 0 + 7 . 1 = 7$
$P_2 = 7$
$L_1 = P_1$ $L_2 = P_2$

Příklad 3:

Řešte soustavu rovnic

x - y = 1
3x - 3y = 3
x = 1 + y
3 . (1 + y) - 3y = 3
3 + 3y - 3y = 3
0 = 0

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Výsledek zapíšeme:
[x; y] = [x; x - 1]

(v tomto obecném zápisu výsledku první neznámou volíme libovolně a druhou neznámou vyjádříme ze kterékoliv zadané rovnice)

Ověření správnosti řešení:

Pro x = 1 dostáváme [1; 0]
$L_1 = 1 - 0 = 1$
$P_1 = 1$
$L_2 = 3 . 1 - 3 . 0 = 3$
$P_2 = 3$
$L_1 = P_1$ $L_2 = P_2$

Příklad 4:

Řešte soustavu rovnic:

$$\frac{3x + y}{z + 1} = 2$$
$$\frac{3y + z}{x + 1} = 2$$
$$\frac{3x + z}{y + 1} = 2$$

Stanovíme podmínky řešitelnosti: $z \neq -1$; $x \neq -1$; $y \neq -1$

3x + y = 2 . (z + 1)
3y + z = 2 . (x + 1)
3x + z = 2 . (y + 1)
3x + y = 2z + 2
3y + z = 2x + 2
3x + z = 2y + 2
3x + y - 2z = 2
-2x + 3y + z = 2
3x - 2y + z = 2
Z první rovnice vyjádříme neznámou y:
y = -3x + 2z + 2 (1)
Dosadíme do zbývajících dvou rovnic:
3 . (-3x + 2z + 2) + z = 2 . (x + 1)
3x + z = 2 . (-3x + 2z + 2 + 1)
-9x + 6z + 6 + z = 2x + 2
3x + z = -6x + 4z + 4 + 2
-11x + 7z = -4
9x - 3z = 6
Druhou rovnici vykrátíme třemi, poté z ní vyjádříme neznámou z:
z = 3x - 2 (2)
Dosadíme do první rovnice:
-11x + 7 . (3x - 2) = -4
-11x + 21x - 14 = -4
10x = 10
x = 1
Dosadíme do rovnice (2):
z = 3 . 1 - 2 = 1
Dosadíme do rovnice (1):
y = -3 . 1 + 2 . 1 + 2 = 1
Výsledky neodporují podmínkám řešitelnosti.
Zapíšeme výsledek:
[x; y; z] = [1; 1; 1]

Zkouška:

$$L_1 = \frac{3.1+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$P_1 = 2$

$L_1 = P_1$

$$L_2 = \frac{3.1+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$P_2 = 2$

$L_2 = P_2$

$$L_3 = \frac{3.1+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$P_3 = 2$

$L_3 = P_3$

Shrnutí postupu řešení soustavy rovnic dosazovací metodou:

1. Jsou-li ve jmenovateli neznámé, stanovíme podmínky řešitelnosti
2. Rovnice upravíme do "základního" tvaru, tj. do tvaru, kdy na levé straně rovnice máme sloučené neznámé (v pořadí podle abecedy) a na pravé straně máme číslo; používáme přitom běžného postupu řešení samostatných rovnic - tedy nejprve odstraňujeme závorky, pak zlomky, atd.
3. Z libovolné rovnice vyjádříme libovolnou neznámou (výhodné je volit tu, kde je koeficient 1).
4. Tuto vyjádřenou neznámou dosadíme do zbývající rovnice (příp. do zbývajících rovnic, je-li jich více).
5. Vyřešíme vzniklou rovnici o jedné neznámé běžným způsobem (platí tehdy, pokud byla zadána soustava dvou rovnic o dvou neznámých; pokud rovnic bylo více, vznikla nám nyní soustava více rovnic a musíme dále opakovat kroky 2) - 4)).
6. Vypočtenou neznámou dosadíme do rovnice, kde jsme vyjádřili první neznámou (krok 3)) a vyřešíme druhou neznámou.
7. Provedeme zkoušku, a to tak, že dosazujeme do každé strany každé rovnice.
8. Zapíšeme výsledek uspořádanou dvojicí.

Řešení soustav rovnic metodou sčítací

Sčítací metodu je výhodné použít tehdy, pokud je u všech neznámých v rovnicích upravených do "základního" tvaru koeficient jiný než číslo 1 nebo (-1). Lze ji s výhodou ale samozřejmě použít i v případě, že tam jednička je.

Sčítací metodu používáme zpravidla u soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Je ji ale možno použít i pro více rovnic.

Ukázkové příklady:

Příklad 5:

Řešte soustavu rovnic:

2 . (x - 3y) = 15

4x - y = -3

2x - 6y = 15 (1)

4x - y = -3

Rovnice upravíme tak, aby po jejich sečtení vypadla neznámá x. Znamená to, že první rovnici vynásobíme číslem (-2) a druhou necháme beze změn.

Pozn.: Sečíst rovnice znamená sečíst jejich levé strany a jejich pravé strany.

-4x + 12y = -30

4x - y = -3

Rovnice sečteme

-4x + 4x + 12y - y = -30 - 3

11y = -33

y = -3

Vrátíme se k rovnicím v zápisu (1), tj. k rovnicím upraveným do "základního" tvaru. Nyní je upravíme tak, aby po jejich sečtení vypadla neznámá y. Stačí tedy první rovnici ponechat a druhou vynásobit číslem (-6):

2x - 6y = 15

-24x + 6y = 18

Obě rovnice opět sečteme:

2x - 24x - 6y + 6y = 15 + 18

-22 x = 33

x = -1,5

Zapíšeme výsledek: [x; y] = [-1,5; -3]

Zkouška se provádí stejným způsobem jako u dosazovací metody.

Pozn.: Někdy se soustava rovnic také řeší tak, že jednu neznámou vyřešíme sčítací metodou a vzniklý kořen pak dosadíme do některé ze zadaných rovnic. Vyřešením rovnice o jedné neznámé pak získáme kořen druhý. V tomto případě ale už nelze hovořit o sčítací metodě.

Pozn.: Pokud chceme řešit sčítací metodou soustavu více než dvou rovnic, pak postupujeme tak, že např. v soustavě třech rovnic, která je v "základním" tvaru, upravíme rovnice tak, aby po sečtení libovolných dvou rovnic vypadla jedna neznámá a při sečtení jiné libovolné dvojice vypadla tatáž neznámá. Tím získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou pak řešíme podle postupu v příkladu 5.

◈ Soustavy rovnic - procvičovací příklady

1. Řešte soustavu rovnic 908

$$\frac{2-x}{3} - y = -\frac{7}{3}$$

$$x + 2y = 7$$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [3; 2]

2. Řešte soustavu rovnic: $x + 2y = 3$ 891

$$2x + 4y = 6$$

Výsledek: Nekonečně mnoho řešení

3. Řešte soustavu rovnic: 895

$$\frac{2x - 3y + 1}{6} = \frac{3x - 8y}{4} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{2x + 3y + 2}{6} = \frac{5x - y}{10} - \frac{1}{15}$$

Výsledek: Soustava nemá řešení.

4. Řešte soustavu rovnic: 892

$$x + 2y = 1$$
$$x - y = 4$$

Výsledek: Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [3,-1]

5. Řešte soustavu rovnic 907

$$2x - y = 2$$
$$2x - y = 10$$

Výsledek: Nemá řešení

6. Řešte soustavu rovnic: 903

$$2x + 3y = 8$$
$$4 - x = \frac{3}{2} y$$

Výsledek: Nekonečně mnoho řešení

7. Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku: 894

$$\frac{9x+2y}{7} = \frac{x-3y}{4}$$
$$y-x = 1-3\cdot(2x+y)$$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [1; -1]

8. Řešte soustavu rovnic: 901

$$x - y = 1$$
$$3x - 3y = 3$$

Výsledek: Nekonečně mnoho řešení

9. Řešte soustavu rovnic: 905

$$(x+5)(y-2) = (x+2)(y-1)$$
$$(x-4)(y+7) = (x-3)(y+4)$$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [7; 5]

10. Řešte soustavu rovnic: 893

$$\frac{9x+2y}{7} = \frac{x-3y}{4}$$
$$\frac{2x+y}{3} = \frac{x-y+1}{9}$$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [1; -1]

11. Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku: 897

$$\frac{9x + 2y}{7} = \frac{x - 3y}{4}$$
$$y - x = 1 - 3\cdot(2x + y)$$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [1; -1].

12. Řešte soustavu rovnic: 902

$$12x + 16y + 1 = 0$$
$$3x + 4y + 2 = 0$$

Výsledek: Nemá řešení.

13. Řešte soustavu rovnic 906

$$x - y = 5$$
$$x - 2y = 2$$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [8; 3]

14. Řešte soustavu rovnic 899

$$x + y = 6$$
$$x - y = 2$$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [4; 2]

15. Řešte soustavu rovnic: 904

$$\frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5}$$
$$\frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x$$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [11; 6]

16. Řešte soustavu rovnic: 896

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 10 = x(x + 6) + y(y + 6)$$
$$(x + 1)^2 - (y + 1)^2 + 8 = x(x - 6) - y(y - 6)$$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [1; 2]

17. Řešte soustavu rovnic: *900*

$2x + y - 5 = 0$

$3x - y = 0$

Výsledek: Řešení je uspořádaná dvojice [1; 3]

18. Řešte soustavu rovnic *898*

$3x + y = 9$

$x + 2y = -2$

Výsledek: Řešením je uspořádaná dvojice [4; -3]

Obsah