Variace

1

Nerovnice a nerovnice v součinovém nebo v podílovém tvaru

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

1. Intervaly

Intervaly, jejich zápis a znázornění

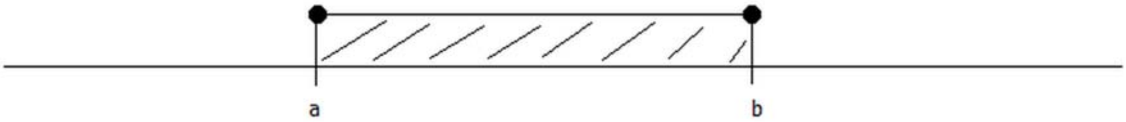
Užití intervalů je široké a setkáme se s nimi nejen při řešení nerovnic. Interval je vlastně jakési rozmezí čísel.

Rozdělení intervalů:

1. Uzavřený interval $a \le x \le b$

(x je menší nebo rovno b a zároveň větší nebo rovno než a)

- zapisujeme též množinově: $x \in \langle a; b \rangle$

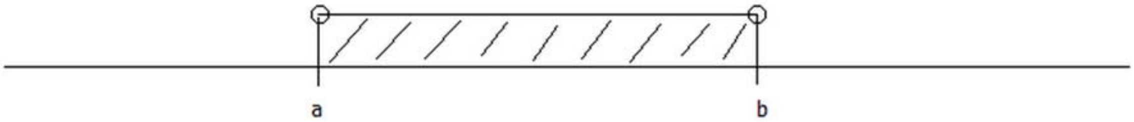


Grafickým znázorněním tohoto intervalu je úsečka se svými krajními body.

2. Otevřený interval $a < x < b$

(x je menší než b a zároveň větší než a)

- zapisujeme též množinově: $x \in (a; b)$

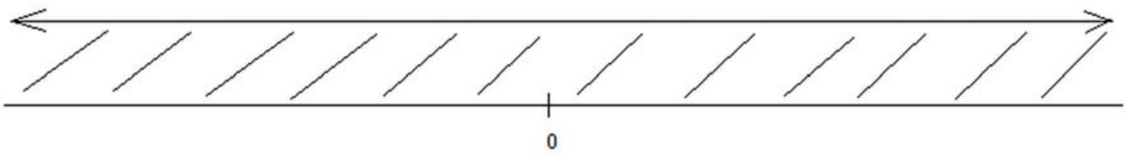


Grafickým znázorněním je úsečka bez krajních bodů.

Poznámka: Zvláštním případem otevřeného intervalu je celá množina reálných čísel.

Grafickým znázorněním je přímka.

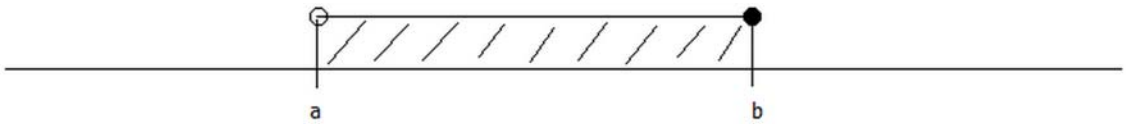
$x \in (-\infty; +\infty)$ nebo jinak $x \in R$



3. Polootevřený (polouzavřený) interval $a < x \le b$

(x je menší nebo rovno b a zároveň větší než a)

- zapisujeme též množinově: $x \in (a; b\rangle$

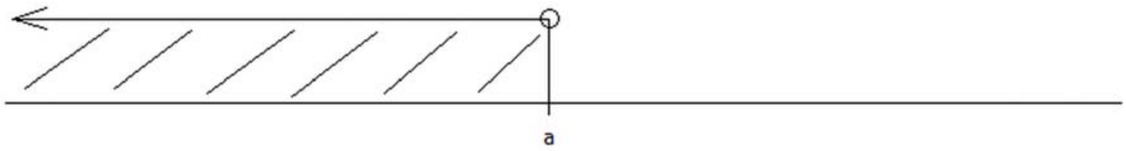


Grafickým znázorněním je úsečka s jedním krajním bodem. Takovýto interval někdy také nazýváme **zprava uzavřený interval**.

Pozn.: Analogicky bychom mohli definovat **zleva uzavřený interval**.

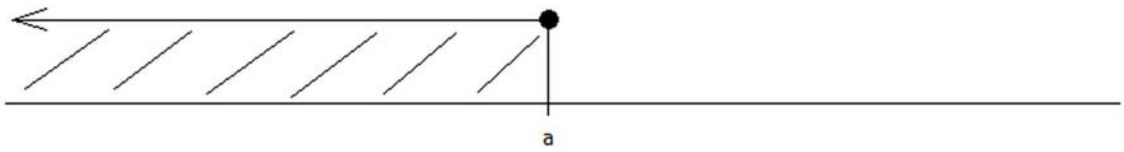
4. Další typy intervalů

x < a   x ∈ (-∞; a)



Analogicky by byl interval pro x > a

x ≤ a   x ∈ (-∞; a>



Opět analogicky by vypadal interval pro x ≥ a

Průnik a sjednocení intervalů

S průnikem a sjednocením intervalů se setkáme v praxi například při řešení soustav nerovnic, ale i u některých funkcí - například u funkcí s absolutní hodnotou.

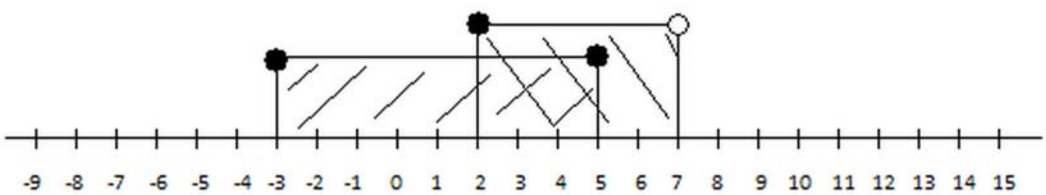
Průnik dvou intervalů obsahuje tu část číselné osy, jejíž obsah patří do obou intervalů současně.

Příklad 1:

Určete průnik a sjednocení intervalů

$A = \langle -3; 5 \rangle, B = < 2; 7)$

Řešení:

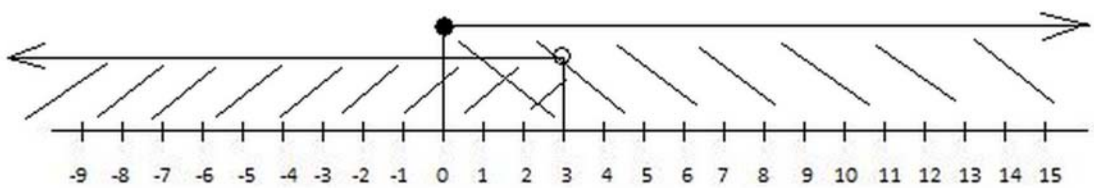


Při průniku hledáme to, co je oběma intervalům společné, tedy řešením je uzavřený interval A ∩ B = $\langle 2; 5 \rangle$ Do sjednocení patří to, co je aspoň v jednom z intervalů, tedy řešením je A ∪ B = <–3; 7).

Příklad 2:

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-∞; 3) a B = <0; +∞)

Řešení:

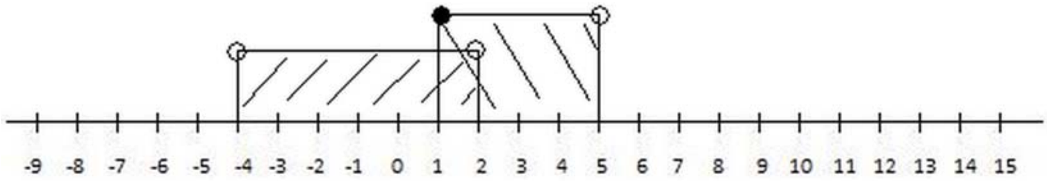


Společnou částí (průnikem) je v tomto případě zleva uzavřený interval <0; 3). Sjednocením je to, co patří aspoň do jednoho z intervalů, a to (-∞; +∞).

Příklad 3:

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-4; 2) a B = <1; 5)

Řešení:

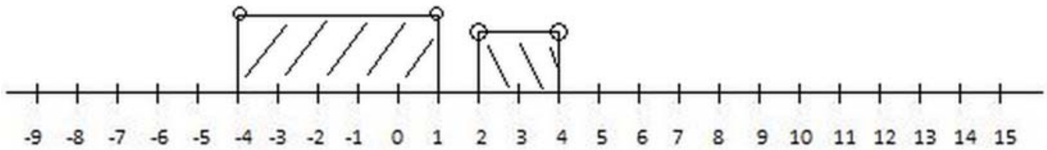


Průnikem je A ∩ B = <1; 2). Při sjednocení hledáme to, co patří alespoň do jednoho z intervalů. Řešením je tedy otevřený interval A ∪ B = (-4; 5).

<u>Příklad 4:</u>

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-4; 1) a B = (2; 4).

Řešení:

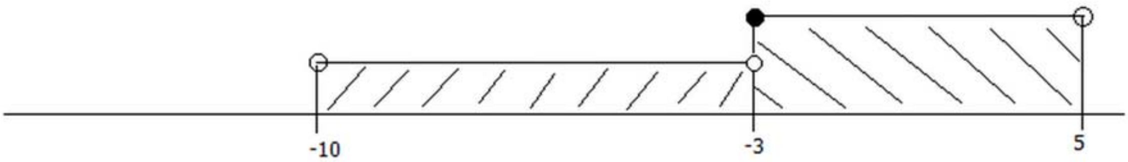


Společné prvky neexistují, proto průnikem je prázdná množina. Zapisujeme A ∩ B = { }. Sjednocením je A ∪ B = (-4; 1) ∪ (2; 4).

<u>Příklad 5:</u>

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-10; -3), B = <-3; 5).

Řešení:

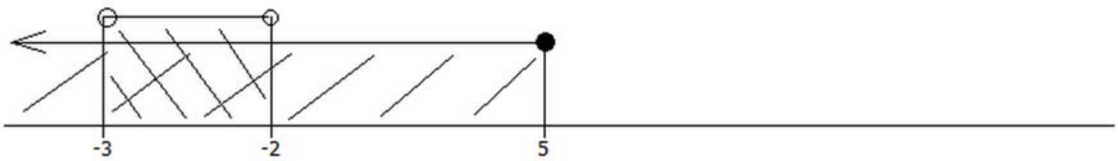


Společný prvek opět neexistuje, proto průnikem je A ∩ B = { }. Sjednocením je A ∪ B = (-10; 5).

<u>Příklad 6:</u>

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-∞; 5>, B = (-3; -2).

Řešení:



Průnikem je A ∩ B =(-3; -2). Sjednocením je A ∪ B = (-∞; 5>.

2. Nerovnice

Nerovnice je zápis nerovnosti dvou matematických výrazů.

Nerovnice, podobně jako rovnice, může obsahovat **jednu nebo více neznámých.**

Postup řešení nerovnic je obdobný, jako při řešení rovnic s tou výjimkou, že pokud násobíme nebo dělíme nerovnici záporným číslem, mění se znak nerovnosti v opačný.

$>$ ... čteme větší

$<$ ... čteme menší

$\leq$ ... čteme menší nebo rovno

$\geq$ ... čteme větší nebo rovno

Je-li v nerovnici použit první nebo druhý z uvedených znaků, nazýváme zápis **ostrou nerovnicí**, je-li naopak použit třetí nebo čtvrtý z uvedených znaků, nazýváme **nerovnici neostrou**.

Výsledek řešení nerovnice zpravidla graficky znázorňujeme, zapisujeme intervalem a provádíme ověření správnosti řešení.

Pozn.: Ověření správnosti, ne tedy zkouška, proto, že většinou je řešením celý interval a my nemáme možnost všechna čísla z daného intervalu dosadit.

<u>Ukázkové příklady:</u>

<u>Příklad 1:</u>

Řešte nerovnici v R:

$$\frac{7-2x}{6} > \frac{3x-7}{12}$$

Řešení:

Celou nerovnici vynásobíme dvanácti:

2 . (7 - 2x) > 3x - 7

14 - 4x > 3x - 7

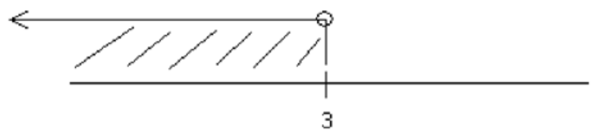
-7x > -21

V tomto případě budeme celou nerovnici dělit číslem (-7), což je číslo záporné, proto se znak nerovnosti změní v opačný:

x < 3

Výsledek zapíšeme intervalem: $x \in (-\infty; 3)$

Graficky znázorníme:



Provedeme ověření správnosti řešení pro libovolné číslo z výsledného intervalu - např. pro x = 0:

$$L = \frac{7-2.0}{6} = \frac{7}{6} \qquad P = \frac{3.0-7}{12} = -\frac{7}{12}$$

L > P

<u>Příklad 2:</u>

Řešte nerovnici v R:

$$\frac{2x-1}{4}-\frac{x+3}{2}>1$$

Řešení:

Celou nerovnici vynásobíme čtyřmi, což je kladné číslo, proto znak nerovnosti se nemění.

$2x - 1 - 2 \,.\, (x + 3) > 4$

$2x - 1 - 2x - 6 > 4$

$-7 > 4$

Výsledkem je nepravdivá nerovnost, proto nerovnice nemá řešení.

Pozn.: Vyjde-li při řešení nerovnice nepravdivá rovnost, pak nerovnice nemá řešení. Pokud by při řešení nerovnice vyšel závěr, kterým je pravdivá nerovnost, pak řešením je každé reálné číslo.

3. Nerovnice - procvičovací příklady

1. **Řešte nerovnici:** 1935
$4x - 1 \leq 3(2 - x) + 7(x - 1)$
OK Každé reálné číslo

2. **Řešte nerovnici:** 1930
$$x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}<4$$
OK $x < 3{,}5$

3. **Řešte nerovnici:** 1929
$$\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0$$
OK $x > 17$

4. **Řešte nerovnici v R:** 1926
$$\frac{4.5-2x}{5}<\frac{2-3x}{10}$$
OK $x \in (38; +\infty)$

5. **Řešte nerovnici v R:** 1928
$$\left(\frac{2x-3}{3}\right)^2-\left(\frac{4-2x}{3}\right)^2\geq\frac{x}{3}$$
OK $x \in \langle 7; +\infty)$

6. **Řešte nerovnici:** 1934
$$1+3x<\frac{x}{3}-\frac{2x-3}{4}+\frac{1}{4}$$
OK $x \in (-\infty; 0)$

7. **Řešte nerovnici:** 1931
$2x.(2x - 5) - 27 < (2x + 1)^2$
OK $x > -2$

8. **Řešte nerovnici v R:** 1927

$$\frac{5x-4}{3}-\frac{2-x}{4}>\frac{x}{6}-\frac{x+6}{5}$$

OK

$$x>\frac{38}{117}$$

9. **Řešte nerovnici:** 1932

$$\left(\frac{3x+1}{5}\right)^2-\left(\frac{2-3x}{5}\right)^2\leq 5$$

OK

$$x\leq\frac{64}{9}$$

10. **V množině přirozených čísel řešte nerovnici:** 1933
$(5x - 4)^2 - (4x - 3)^2 < (3x + 5)^2$

OK Řešením je libovolné přirozené číslo.

4. Nerovnice v součinovém nebo podílovém tvaru

Pokud máme nerovnici v podílovém tvaru, tzn. že ve jmenovateli je výraz s neznámou, nemůžeme takovouto nerovnici násobit nejmenším společným jmenovatelem jako tomu bylo u rovnic, protože nevíme, zda je jmenovatel kladný nebo záporný. Použijeme tedy jiný postup. Stejný postup použijeme i tehdy, budeme-li mít na jedné straně nerovnice součin (nebo podíl) a na druhé straně nerovnice číslo nula. Do takového tvaru lze nerovnici poměrně často převést.

<u>Postup je pak následující:</u>

1. Zvážíme, zda podíl (nebo součin) má být kladný nebo záporný (případně nezáporný nebo nekladný)

2. Má-li být kladný, musí být oba činitelé, příp. dělenec i dělitel, buď oba kladné nebo oba záporné; to využijeme v dalším řešení. Má-li být záporný, pak musí být buď první činitel kladný a druhý záporný nebo první činitel záporný a druhý kladný (obdobně pro zlomek).

3. Ze dvou situací, které tak postupně řešíme, nakonec uděláme sjednocení.

<u>Ukázkové příklady:</u>

<u>Příklad 1:</u>

Řešte nerovnici v oboru reálných čísel:

$$\frac{x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{2}}>0$$

Řešení:

Nerovnici už máme upravenu na podílový tvar (vlevo podíl výrazů, vpravo nula). Stanovíme nulové body a zobrazíme je na číselné ose. Nulový bod je takový bod, pro který je výraz v čitateli nebo výraz ve jmenovateli roven nule.

Nulové body nám rozdělily číselnou osu na několik intervalů, v našem případě na 3 intervaly. Hraniční body budou do příslušných intervalů patřit tehdy, pokud bude v zadání neostrá nerovnost (tj. větší nebo rovno, či menší nebo rovno) a navíc ještě se nebude rovnat o nulový bod vzniklý ze jmenovatele, kde s ohledem na podmínku řešitelnosti vyjít nula nesmí. To ale náš případ není. Proto budou všechny intervaly otevřené. Vytvoříme tak tabulku:

	$x \in (-\infty; -\sqrt{2}/2)$	$x \in (-\sqrt{2}/2; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; +\infty)$
$x - \sqrt{3}$	-	-	+
$2x + \sqrt{2}$	-	+	+
Podíl	+	-	+

Do horního záhlaví tabulky jsme zapsali tři vzniklé otevřené intervaly, do levého záhlaví pak postupně do řádků výraz v čitateli, výraz ve jmenovateli a výsledný celý výraz na levé straně zadané nerovnice. Následně pak postupně vybíráme libovolné číslo patřící do intervalu v záhlaví prvního sloupce a zjišťujeme, zda výraz v čitateli a následně výraz ve jmenovateli nabývá po dosazení uvedeného čísla hodnoty kladné, či záporné. Vzniklý závěr uvedeme do prvního sloupce tabulky. V posledním řádku prvního sloupce tabulky pak v našem případě doplníme znaménko "+", protože podíl dvou záporných výrazů (viz řádky nad...) je výraz kladný. Stejné kroky provedeme pak pro druhý a dále pro třetí sloupec.

Pozn.: Jedno z kontrol správnosti řešení je to, že v tabulce nesmějí vyjít dva sloupce, které by měly ve všech řádcích shodné znaménko.

Nyní jsme s řešením téměř hotovi. V zadání nerovnice byl znak "větší", tzn. výraz na levé straně musí být kladný, a to je splněno tam, kde v posledním řádku tabulky vyšlo kladné znaménko. Je to tedy ve 2. a 4. sloupci.

Řešením nerovnice je tedy sjednocení intervalů K = $(-\infty; -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

Celou zadanou nerovnici lze řešit i jiným postupem:

Vidíme, že nerovnice je v podílovém tvaru, na pravé straně je číslo 0. Aby byla splněna, mohou tedy nastat dvě situace:

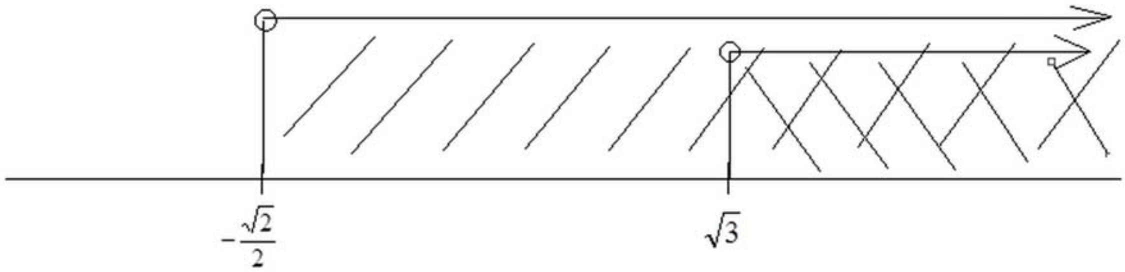
1. možnost:

$x - \sqrt{3} > 0 \wedge 2x + \sqrt{2} > 0$

Odtud:

$x > \sqrt{3} \quad \wedge \quad x > -\sqrt{2}/2$

Z těchto dvou nerovnic děláme průnik (musí platit současně); vhodné je grafické znázornění:



Řešením je to, co je šrafováno obousměrně, tedy interval $(\sqrt{3}; +\infty)$

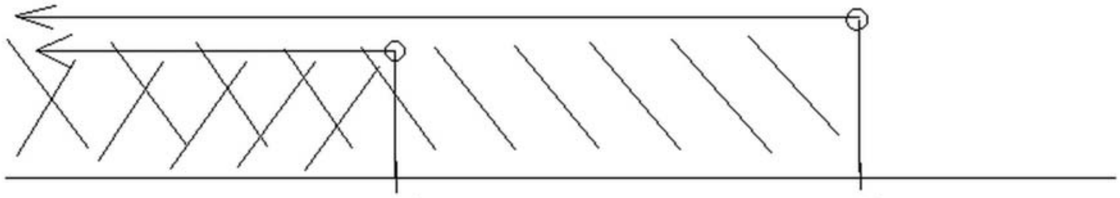
2. možnost:

$x - \sqrt{3} < 0 \wedge 2x + \sqrt{2} < 0$

Odtud:

$x < \sqrt{3} \quad \wedge \quad x < -\sqrt{2}/2$

Z těchto dvou nerovnic opět děláme průnik (musí platit současně); vhodné je opět grafické znázornění:



Řešením je opět to, co je šrafováno obousměrně, tedy interval (-∞ ; -√2/2)

Celkovým řešením je sjednocení obou intervalů, tedy

x ∈ (-∞ ; -√2/2) ∪ (√3; +∞)

Je na každém, aby si sám zvolil, který postup považuje za výhodnější.

Celkové řešení graficky znázorníme:

Ověření správnosti: Pro x = 2:

$$L = \frac{2-\sqrt{3}}{2.2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4+\sqrt{2}} = \textit{přibližně}\ 0{,}05 > 0$$

P = 0

L > P

<u>Příklad 2:</u>

Řešte nerovnici v R:

$$\frac{x-2}{x-5} > 1 - \frac{3}{x+2}$$

Převedeme vše na levou stranu a poté na společného jmenovatele:

$$\frac{(x+2).(x-2)-(x-5).(x+2)+3.(x-5)}{(x-5).(x+2)} > 0$$

V čitateli roznásobíme a sloučíme:

$$\frac{x^2-4-x^2-2x+5x+10+3x-15}{(x-5).(x+2)} > 0$$

$$\frac{6x-9}{(x-5).(x+2)} > 0$$

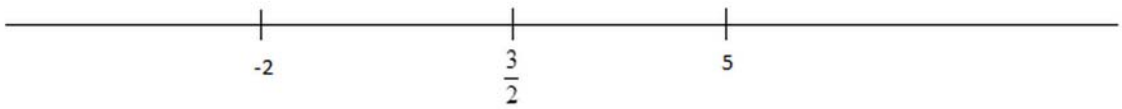
$$\frac{3.(2x-3)}{(x-5).(x+2)} > 0$$

Celou nerovnici vydělíme třemi, znak nerovnosti se nezmění:

$$\frac{(2x-3)}{(x-5).(x+2)} > 0$$

Nyní můžeme pro řešení opět použít dva postupy (viz předcházející příklad).

I. možnost - pomocí nulových bodů a tabulky:



	x ∈ (-∞; -2)	x ∈ (-2; 3/2)	x ∈ (3/2; 5)	x ∈ (5; +∞)
2x - 3	-	-	+	+
x - 5	-	-	-	+
x + 2	-	+	+	+
Celkový výraz na levé straně nerovnice	-	+	-	+

Opět vidíme, že celkovému zadání nyní vyhovují ty sloupce (intervaly), kde ve spodním řádku vyšlo znaménko "+".

Celkové řešení je tedy K = (-2; 3/2) ∪ (5; +∞)

II. možnost:

Nyní mohou nastat následující situace:

1. možnost:

$2x - 3 > 0 \wedge x - 5 < 0 \wedge x + 2 < 0$

$x > 3/2 \wedge x < 5 \wedge x < -2$

Závěr:

$x \in \{\ \}$

2. možnost:

$x - 5 > 0 \wedge 2x - 3 < 0 \wedge x + 2 < 0$

$x > 5 \wedge x < 3/2 \wedge x < -2$

Závěr:

$x \in \{\ \}$

3. možnost:

$x + 2 > 0 \wedge 2x - 3 < 0 \wedge x - 5 < 0$

$x > -2 \wedge x < 3/2 \wedge x < 5$

Závěr:

$x \in (-2; 3/2)$

4. možnost:

$2x - 3 > 0 \wedge x - 5 > 0 \wedge x + 2 > 0$

x > 3/2 ∧ x > 5 ∧ x > -2

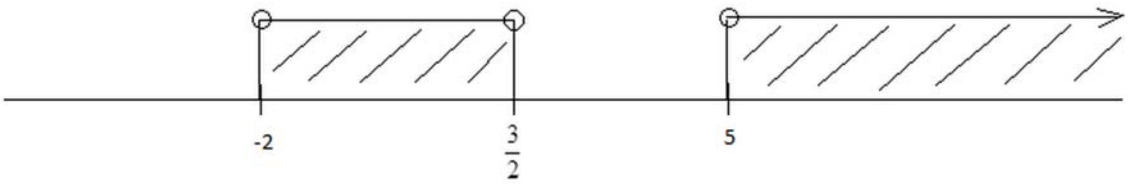
Závěr:

x ∈ (5; +∞)

Celkové řešení:

x ∈ (-2; 3/2) ∪ (5; +∞)

Graficky znázorníme:



Ověření správnosti řešení:

Pro x = 0:

$$L = \frac{0-2}{0-5} = \frac{2}{5}$$

$$P = 1 - \frac{3}{0+2} = 1 - \frac{3}{2} = -0{,}5$$

L > P

Příklad 3:

Řešte nerovnici v oboru reálných čísel:

$$\frac{x+2}{1-x} \le -2$$

Řešení:

V tomto příkladu už se z úsporných důvodů zaměříme pouze na řešení pomocí nulových bodů a tabulky.

$$\frac{x+2}{1-x} \le -2$$

$$\frac{x+2}{1-x} + 2 \le 0$$

$$\frac{x+2+2-2x}{1-x} \le 0$$

$$\frac{4-x}{1-x} \le 0$$

Vzhledem k tomu, že v zadání nerovnice je neostrá nerovnost, mohou být intervaly polouzavřené, případně dokonce uzavřené. U symbolu nekonečna je interval vždy otevřený a otevřený bude i u čísla (-1), protože to představuje nulový bod ze jmenovatele, kde nula vyjít nesmí (s ohledem na podmínku řešitelnosti). Proto uzavřená hranice bude tedy pouze u čísla 4.

	x ∈ (-∞; 1)	x ∈ (1; 4>	x ∈ <4; +∞)
4 - x	+	+	-
1 - x	+	-	-
Celkový výraz na levé straně nerovnice	+	-	+

Řešením je tedy K = (1; 4>. Grafické znázornění a ověření už jistě každý sám zvládne. Dosazuje se vždy do původní nerovnice.

5. Nerovnice v součinovém nebo v podílovém tvaru - procvičovací příklady

1. **Určete všechna reálná čísla x, pro která platí:** 1969

$$\frac{3-2x}{2x-5} < 0$$

OK K = (-∞; 1,5) ∪ (2,5; +∞)

2. **Určete všechna reálná čísla x, pro která platí:** 1967

$$\frac{x-5}{x-1} > 0$$

OK K = (-∞; 1) ∪ (5; +∞)

3. **Řešte nerovnici v R:** 1951
$-4(3 - x)^2 \geq 11x - 33$

OK $K = \left\langle 0{,}25; 3 \right\rangle$

4. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1959
$-5(1 - x)^2 < 3x + 11$

OK Řešením nerovnice je každé reálné číslo.

5. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1960

$$\frac{x^2-4x-5}{x^2-9} \geq 1$$

OK K = (-∞; -3) ∪ <1; 3)

6. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1957

$$6.\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \leq x.\sqrt{2}+\frac{19}{4}$$

OK

$$K = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{3}; \sqrt{2} \right\rangle$$

7. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1963

$$\frac{1-3x}{x+4} < 2$$

OK K = (-∞; -4) ∪ (−7,5; +∞)

8. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1962

$$\frac{x-1}{x} > \frac{x-2}{x-1}$$

OK K = (0; 1)

9. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1964

$$\frac{3x-1}{x+1} < 2$$

OK K = (-1; 3)

10. **Řešte nerovnici v R:** 1954
$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 \leq 0$

OK $K = \langle -1; 2 \rangle$

11. **V množině R řešte nerovnici:** 1966
$x - 3\sqrt{x} - 4 \geq 0$

OK K = <16; +∞)

12. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1961

$$\frac{1}{x-1} + 1 > \frac{1}{x+2}$$

OK K = (-∞;-2) ∪ (1; +∞)

13. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1955
$x^2 - 2x - 3 \geq 0$

OK K = (-∞; -1> ∪ <3; +∞)

14. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1956
$x^2 - 0{,}2x + 0{,}01 \leq 0$

OK Nerovnice má právě jedno řešení x = 0,1.

15. **Určete všechna reálná čísla x, pro která platí:** 1968

$$\frac{3-2x}{2x-5} > 0$$

OK K = (1,5; 2,5)

16. **Řešte nerovnici v R:** 1952

$$\frac{5-x}{2x-2} + \frac{1+4x}{2x+2} < 1$$

OK K = (-1; 1)

17. **Řešte nerovnici v R:** 1953

$$\sqrt{x^2 + x - 12} < 6 - x$$

OK K = (-∞; -4) ∪ (3; 48/13)

18. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1965

$$\frac{x^2+x}{x^2+1} \le 1$$

OK K = (-∞; 1>

19. **V množině reálných čísel řešte nerovnici:** 1958
2(1 - x)² ≤ x - 3

OK Nerovnice nemá v R řešení.

Obsah

1. Intervaly 2
2. Nerovnice 4
3. Nerovnice - procvičovací příklady 6
4. Nerovnice v součinovém nebo podílovém tvaru 7
5. Nerovnice v součinovém nebo v podílovém tvaru - procvičovací příklady 12