Variace

1

Kvadratické rovnice s parametrem

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

1. Kvadratické rovnice s parametrem

Kvadratické rovnice s parametrem řešíme úplně stejným způsobem jako lineární rovnice s parametrem. Opět vždy provádíme diskusi řešení vzhledem k parametru. V této diskusi zpravidla uvedeme, pro jakou hodnotu parametru má rovnice dvě různá reálná řešení , pro jakou hodnotu parametru má jeden dvojnásobný kořen a pro jakou hodnotu nemá v oboru reálných čísel řešení. Někdy je nutno také uvést, pro jakou hodnotu parametru vyjde lineární rovnice.

Příklad:

Proveďte úplnou diskusi následující kvadratické rovnice s parametrem m a neznámou x:

$(m - 3)x^2 - (3m + 9)x + 9m = 0$

Řešení:

1. **Pro $m = 3$ ...** **lineární rovnice**
2. Předpokládejme, že $m \neq 3$

Vypočteme diskriminant této kvadratické rovnice:

$D = b^2 - 4ac = [-(3m + 9)]^2 - 4.(m - 3).9m = 9m^2 + 54m + 81 - 36m^2 + 108m =$

$= -27m^2 + 162m + 81$

a) $D > 0$ ... **2 reálné různé kořeny** ... nastane tehdy, jestliže:

$-27m^2 + 162m + 81 > 0 \quad |:(-9)$

$3m^2 - 18m - 9 < 0 \quad |: 3$

$m^2 - 6m - 3 < 0$

Vzniklý trojčlen rozložíme na součin. K tomu si vyřešíme pomocnou kvadratickou rovnici

$m^2 - 6m - 3 = 0$

$$m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{1} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

$m_1 = 3 + 2\sqrt{3} \qquad m_2 = 3 - 2\sqrt{3}$

Hledaný rozklad je tedy: $[m - (3 + 2\sqrt{3})] . [m - (3 - 2\sqrt{3})] < 0$

Mohou nastat dvě situace:

aa) $[m - (3 + 2\sqrt{3})] > 0 \qquad [m - (3 - 2\sqrt{3})] < 0$

Odtud: $m > 3 + 2\sqrt{3} \qquad m < 3 - 2\sqrt{3}$

Závěr: Prázdná množina

ab) $[m - (3 + 2\sqrt{3})] < 0 \qquad [m - (3 - 2\sqrt{3})] > 0$

Odtud: $m < 3 + 2\sqrt{3} \qquad m > 3 - 2\sqrt{3}$

Závěr: **$m \in (3-2\sqrt{3}; 3) \cup (3; 3+2\sqrt{3})$**

b) $D = 0$ ... **Jeden dvojnásobný kořen** ... nastane tehdy, jestliže:

$-27m^2 + 162m + 81 = 0 \quad |:(-9)$

$3m^2 - 18m - 9 = 0 \quad |: 3$

$m^2 - 6m - 3 = 0$

$[m - (3 + 2\sqrt{3})] \cdot [m - (3 - 2\sqrt{3})] = 0$

$\mathbf{m_1 = 3 + 2\sqrt{3}}$ $\mathbf{m_2 = 3 - 2\sqrt{3}}$

c) D < 0 ... **V reálném oboru nemá řešení** ... nastane v doplňku situací a), b), tedy

jestliže $\mathbf{m \in (-\infty; 3-2\sqrt{3}) \cup (3+2\sqrt{3}; +\infty)}$

2. Kvadratické rovnice s parametrem - procvičovací úlohy

1. **Proveďte úplnou diskusi rovnice $ax^2 + 2(a - 1) \cdot x + a - 5 = 0$ o neznámé $x \in R$ vzhledem k hodnotám reálného parametru a.** 2465

OK

Pro:
1) a = 0, pak x = -2,5 ... daná rovnice je rovnicí lineární
2) Diskriminant D = 3a + 1
a) $a \in (-\infty; -1/3)$ (tj. D < 0) ... rovnice nemá reálné kořeny
b) a = -1/3 (tj. D = 0), pak x = -4 ... (dvojnásobný kořen)
c) $a \in (-1/3; 0) \cup (0; +\infty)$ (tj. D > 0) ... dva různé reálné kořeny

2. **Proveďte úplnou diskusi řešení kvadratické rovnice:** 2466
$\mathbf{x^2 + 2(m - 4) \cdot x + m^2 + 6m = 0}$

OK

Pro:
1) $m \in (8/7; +\infty)$ (tj. D < 0) ... rovnice nemá řešení v R
2) m = 8/7 (tj. D = 0) ... x = 20/7 (jeden dvojnásobný kořen)
3) Pro $m \in (-\infty; 8/7)$ (tj. D> 0) ... dva reálné kořeny x_1, x_2

3. **Určete, pro které hodnoty reálného parametru m má rovnice o neznámé $x \in R$ reálné kořeny.** 2464
$\mathbf{x^2 -2(m + 4) \cdot x + m^2 + 6m = 0}$

OK

Pro $m \in \langle -8; +\infty)$

4. **Určete, pro které hodnoty reálného parametru a má rovnice** 2458
$\mathbf{(a - 1) \cdot x^2 + 2(a + 1)x + a - 2 = 0}$
a) reálné kořeny
b) jeden reálný kořen
c) jeden dvojnásobný kořen

OK

Pro:
a) $a \in \langle 0,2; +\infty)$
b) $a \in \{0,2; 1\}$
c) a = 0,2

5. **Pro které reálné hodnoty parametru t má daná rovnice o neznámé $x \in R$ reálné různé kořeny?** 2461
$\mathbf{2x^2 + tx + 2 = 0}$

OK

Pro $t \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

6. **Řešte rovnici s reálným parametrem a a neznámou x:** 2459

$$\frac{4a}{x+a} + \frac{4a}{x-a} = 3$$

OK

a	0	R \ {0}
x	NŘ pro x≠ 0 NS pro x = 0	$3a \vee -\dfrac{a}{3}$

7. **Pro které reálné hodnoty parametru t má daná rovnice o neznámé $x \in R$ reálné různé kořeny?** 2462
$x^2 - tx + 1 - 2t^2 = 0$

OK Pro $t \in (-\infty; -2/3) \cup (2/3; +\infty)$

8. **Proveďte úplnou diskusi řešení kvadratické rovnice:** 2456
$(m - 2) . x^2 - (3m + 6) . x + 6m = 0$

OK Pro:
$m \in (-0{,}4; 2) \cup (2; 6)$ ... dva reálné různé kořeny
$m = -0{,}4 \vee m = 6$ ... jeden dvojnásobný kořen
$m \in (-\infty; -0{,}4) \cup (6; +\infty)$ ... nemá řešení v R

9. **Proveďte úplnou diskusi řešení kvadratické rovnice:** 2467
$(3 + m) . x^2 - 3(6 - m) . x + 5 - 18m = 0$

OK $D = 264 + 88m + 81m^2$ ... výraz má vždy kladnou hodnotu, proto rovnice má vždy dva reálné kořeny, pokud ovšem není $m = -3$, protože pak by se jednalo o lineární rovnici s kořenem $x = 59/27$

10. **Pro které reálné hodnoty parametru m má daná rovnice o neznámé $x \in R$ reálné kořeny?** 2460
$x^2 + mx + 9 = 0$

OK Pro $m \in (-\infty; -6\rangle \cup \langle 6; +\infty)$

11. **Pro které reálné hodnoty parametru t má daná rovnice o neznámé $x \in R$ reálné různé kořeny?** 2463
$x^2 - tx + 2x - 5 + t = 0$

OK Pro $t \in (-\infty; +\infty)$

12. **Pro které reálné hodnoty parametru t má rovnice o neznámé $x \in R$ různé reálné kořeny?** 2457
$2tx^2 + tx + 1 = 0$

OK Pro $t \in (-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$

13. **Proveďte úplnou diskusi řešení kvadratické rovnice:** 2468
$x^2 + 2(m - 1) . x + 3m^2 + 5 = 0$

OK Rovnice nemá v reálném oboru žádné řešení.

Obsah