Variace

1

Posloupnosti

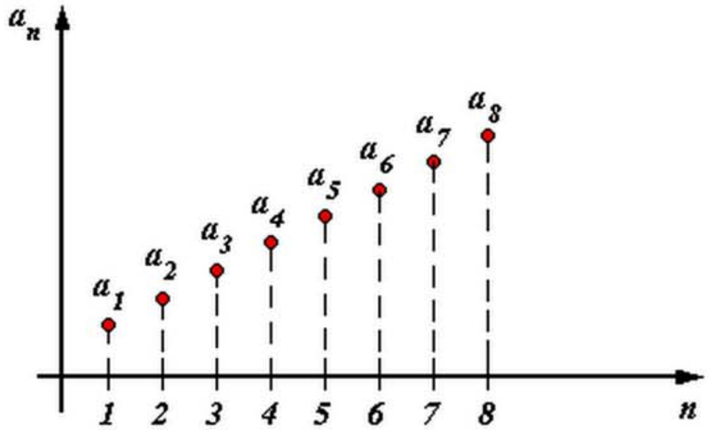
Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

1. Posloupnosti

Posloupnosti

Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel.

Funkční hodnota této funkce přiřazená každému kladnému číslu se nazývá n-tý člen posloupnosti. Nejčastěji se značí a_n, b_n. apod.



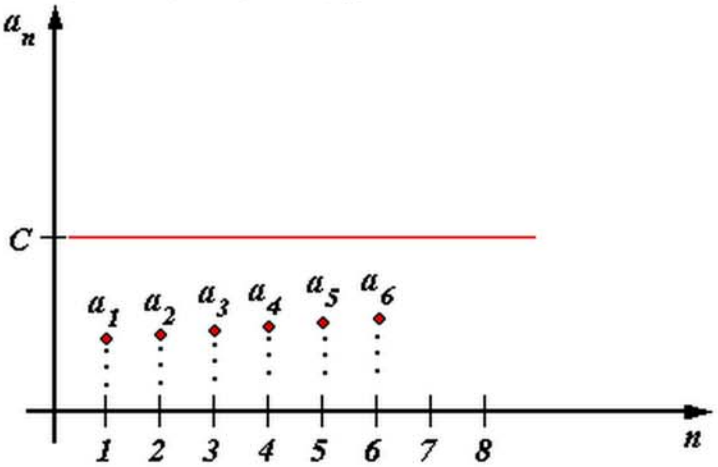
a_1 ... 1. člen posloupnosti
a_2 ... 2. člen posloupnosti
a_3 ... 3. člen posloupnosti
.
.
.
a_7 ... 7. člen posloupnosti
a_8 ... 8. člen posloupnosti
.
.
.
a_n ... n-tý člen posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}$ se zapisuje:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots, a_n$$

Ohraničená (omezená) posloupnost

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo C > 0.



Platí-li

$$|a_1| \leq C \quad |a_2| \leq C \quad |a_3| \leq C \quad |a_4| \leq C \quad |a_5| \leq C \quad |a_6| \leq C$$

obecně pak

$$|a_n| \leq C,$$

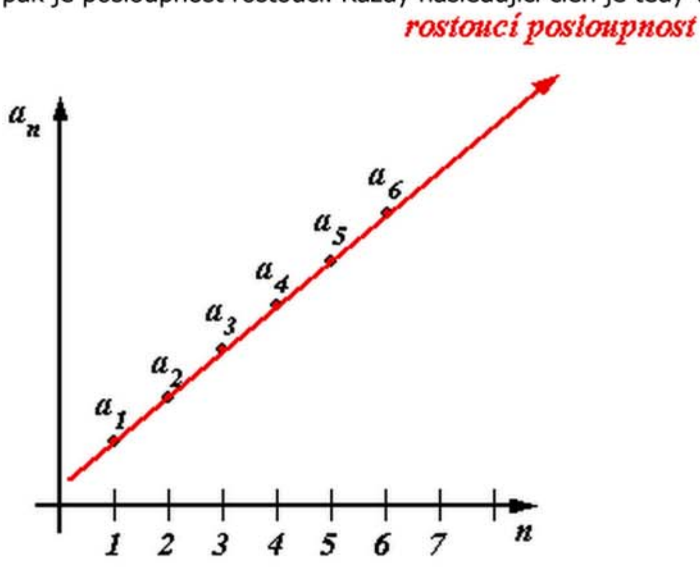
pak je posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená nebo též omezená.

Rostoucí posloupnost

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$. Platí-li:

$$\begin{gathered} a_2 > a_1 \\ a_3 > a_2 \\ a_4 > a_3 \\ a_5 > a_4 \\ a_6 > a_5 \\ \vdots \\ a_{n+1} > a_n \\ \vdots \end{gathered}$$

pak je posloupnost rostoucí. Každý následující člen je tedy vždy větší než člen předcházející.



Klesající posloupnost

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$. Platí-li:

$a_2 < a_1$

$a_3 < a_2$

$a_4 < a_3$

$a_5 < a_4$

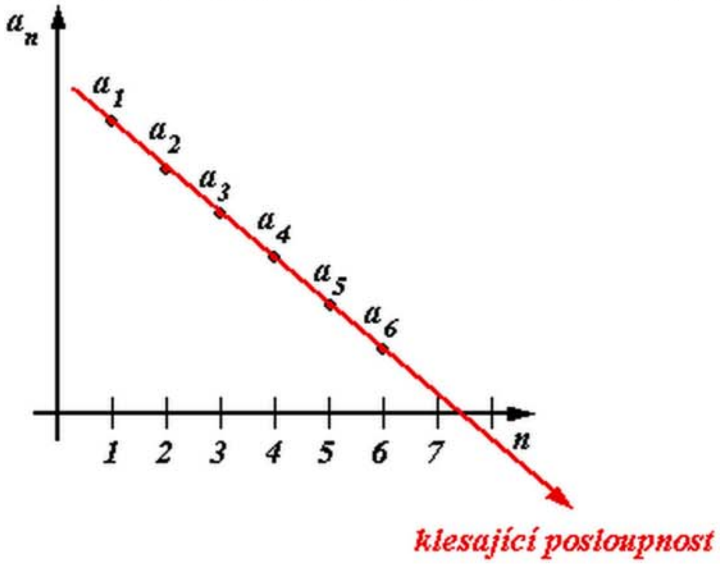
$a_6 < a_5$

$\vdots$

$a_{n+1} < a_n$

$\vdots$

pak je posloupnost klesající. Každý následující člen je tedy vždy menší než člen předcházející.



Pozn.: Pokud posloupnost nabývá stále stejné hodnoty, říkáme, že se jedná o posloupnost konstantní.

Pozn.: Podobně jako funkce, tak i posloupnost může být nerostoucí nebo neklesající.

Konečná posloupnost

Posloupnost se nazývá konečná (tj. má konečný počet členů), jestliže jejím definičním oborem je konečná množina D ⊂ N, tzn., že její definiční obor je množina prvních k přirozených čísel.

Například předpis pro n-tý člen bude {2n - 1}, číslo k = 6.

$\{2n-1\}_{n=1}^{6} = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

$n = 1 \quad a_1 = 1$

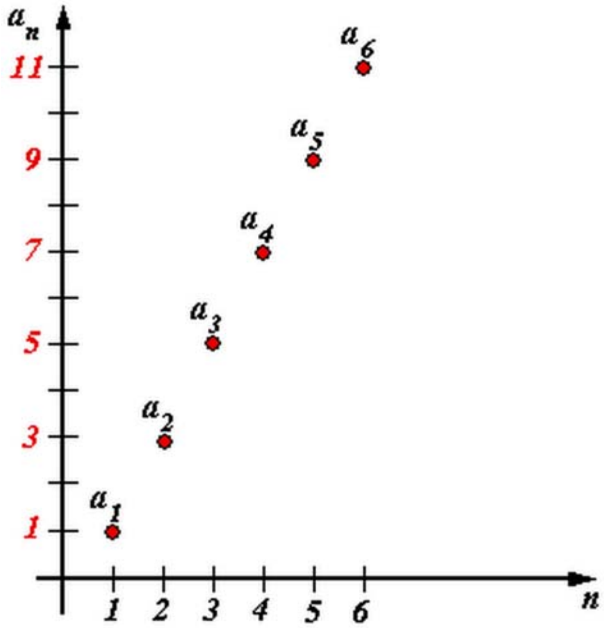
$n = 2 \quad a_2 = 3$

$n = 3 \quad a_3 = 5$

$n = 4 \quad a_4 = 7$

$n = 5 \quad a_5 = 9$

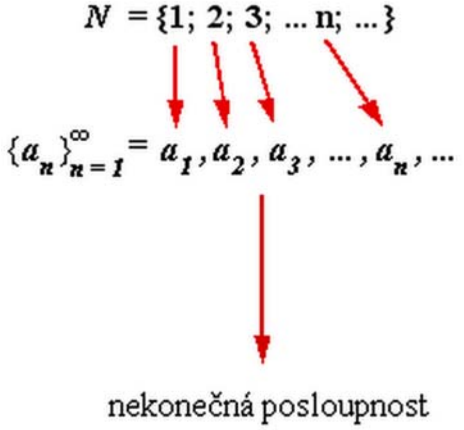
$n = 6 \quad a_6 = 11$



Nekonečná posloupnost

Posloupnost se nazývá nekonečná (tj. má nekonečný počet členů), jestliže jejím definičním oborem je celá množina N.

$N = \{1; 2; 3; \ldots n; \ldots\}$ ... definiční obor posloupnosti, množina N má nekonečný počet prvků



Zadání posloupnosti rekurentně

Je-li u posloupnosti zadán její první člen a_1 a dále a_{n+1}. člen vyjádřený pomocí a_n-tého členu, říkáme, že je posloupnost zadána rekurentně.

2. Posloupnosti - procvičovací příklady

1. **Stanovte n-tý člen posloupnosti:** 2272

$$\frac{1}{3}; \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{5}{7}; \quad \frac{7}{9}; \quad \ldots$$

OK

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$$

2. **Vyjádřete následující posloupnost rekurentním vzorcem.** 2244

$$\left\{1+(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK

$$a_1 = 0$$
$$a_{n+1} = 2 - a_n$$

3. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2251

$$\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost je nerostoucí a omezená hodnotou 0.

4. **Zjistěte, které z čísel 10, 35, 50 je členem posloupnosti** 2255

$$\left\{2n^2 - 3n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK 35

5. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2265

$$\left\{\frac{2n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost je rostoucí a omezená hodnotou 2.

6. **Vyjádřete následující posloupnost rekurentním vzorcem.** 2242

$$\left\{n.d\right\}_{n=1}^{\infty}$$
$$d \in R$$

OK

$$a_1 = d$$
$$a_{n+1} = a_n + d$$

7. **Vyjádřete následující posloupnost rekurentním vzorcem.** 2241

$$\left\{n.q^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$
$$q \in R$$

OK

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n.q.\frac{n+1}{n}$$

8. **Stanovte n- tý člen posloupnosti:** 2274

$$\frac{1}{1\cdot 3}\ ;\quad \frac{1}{2\cdot 4}\ ;\quad \frac{1}{3\cdot 5}\ ;\quad \ldots$$

OK

$$a_n = \frac{1}{n.(n+2)}$$

9. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2252

$$\left\{\frac{1}{2-3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost je rostoucí a omezená hodnotou 0.

10. **Napište prvních pět členů posloupnosti dané rekurentně** 2239

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-3a_n$$

$$a_1=0$$

$$a_2=1$$

OK 0; 1; 2; 1; -4

11. **Vyjádřete následující posloupnost rekurentním vzorcem.** 2246

$$\{1\}_{n=1}^{\infty}$$

OK

$$a_1=1$$

$$a_{n+1}=a_n$$

12. **Vyjádřete následující posloupnost rekurentním vzorcem.** 2243

$$\left\{\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK

$$a_1=-1$$

$$a_{n+1}=a_n$$

13. **Vyjádřete následující posloupnost rekurentním vzorcem.** 2245

$$\{1-n\}_{n=1}^{\infty}$$

OK

$$a_1=0$$

$$a_{n+1}=a_n-1$$

14. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2253

$$\left\{\frac{2n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost je rostoucí a omezená hodnotou 1.

15. **Stanovte n-tý člen posloupnosti:** 2266

$$\frac{1}{2};\quad \frac{3}{4};\quad \frac{5}{8};\quad \frac{7}{16};\quad \ldots$$

OK

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n}$$

16. **Stanovte n-tý člen posloupnosti:** 2273

$$\frac{1}{1\cdot 2}\ ;\quad \frac{1}{2\cdot 3}\ ;\quad \frac{1}{3\cdot 4}\ ;\quad .....$$

OK

$$a_n = \frac{1}{n.(n+1)}$$

17. **Posloupnost je dána rekurentním vzorcem** 2240

$$a_{n+2} = (n+1).a_{n+1} - n.a_n$$

přičemž hodnoty členů a_1, a_2 udávají kořeny níže napsané kvadratické rovnice a platí $a_1 < a_2$. Určete prvních pět členů této posloupnosti.

$$\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{8}{3}$$

OK -14; 10; 34; 82; 226

18. **Stanovte n-tý člen posloupnosti:** 2267

$$\frac{1}{3}\ ;\quad \frac{4}{5}\ ;\quad \frac{9}{7}\ ;\quad \frac{16}{9}\ ;\quad ...$$

OK

$$a_n = \frac{n^2}{2n+1}$$

19. **Určete níže uvedenou posloupnost rekurentním vzorcem** 2262

$$\left\{\frac{1}{n.(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK

$$a_1 = 0{,}5$$

$$a_{n+1} = a_n.\frac{n}{n+2}$$

20. **Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = 2 - a_n$, přičemž $a_1 = 0$. Sledujte jednotlivé členy posloupnosti a určete její n-tý člen jako funkci indexu n.** 2260

OK

$$a_n = 1 + (-1)^n$$

21. **Mějme posloupnost zadanou rekurentně. Vyjádřete ji vzorcem pro n-tý člen.** 2249

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

OK

$$a_n = 2n$$

22. **Jsou dány posloupnosti. Rozhodněte, které z nich jsou omezené.** 2256

$$\{3n+5\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{2-3n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\left\{\frac{1}{2-3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Pouze poslední posloupnost je omezená.

23. **Mějme posloupnost zadanou rekurentně. Vyjádřete ji vzorcem pro n-tý člen.** 2248

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}.(3a_{n+1} - a_n)$$

OK $a_n = 2^{2-n}$

24. **Mějme posloupnost zadanou rekurentně. Vyjádřete ji vzorcem pro n-tý člen.** 2247

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2}.a_n$$

OK $a_n = \dfrac{1}{n.(n+1)}$

25. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2257

$$\left\{3+\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost je klesající a omezená hodnotou 3.

26. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2250

$$\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost není rostoucí ani klesající, omezená je zdola hodnotou -1/2 a shora hodnotou 1/4

27. **Napište prvních šest členů posloupnosti dané rekurentně** 2238

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n - 2$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

OK 1; 2; 1; 1; 0; -1

28. **Stanovte n-tý člen posloupnosti:** 2269

`1; -1; 1; -1; ...`

OK $a_n = (-1)^{n+1}$

29. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2263

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost je rostoucí a omezená hodnotou 1.

30. **Stanovte n-tý člen posloupnosti:** 2268

$$-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{4};\quad -\frac{1}{8};\quad \frac{1}{16};\quad \ldots$$

OK

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

31. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2258

$$\left\{\frac{2n}{n+1}+\frac{n+1}{3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost je rostoucí a omezená hodnotou 7/3.

32. **Posloupnost je dána rekurentním vzorcem** 2254

$$a_{n+1} = \frac{1}{n}.a_n$$

přičemž hodnotu členu a_1 udává přirozené číslo, které je řešením nerovnice

$$\frac{3x-4}{2}+x<\frac{5x-1}{3}<6-2x$$

Napište první čtyři členy této posloupnosti.

OK 1; 1; 1/2; 1/6

33. **Určete níže zadanou posloupnost rekurentním vzorcem** 2261

$$\{n.(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$$

OK

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = a_n + 2.(n+1)$$

34. **Stanovte n-tý člen posloupnosti:** 2270

0; 3; 8; 15; 24; ...

OK

$$a_n = n^2 - 1$$

35. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2264

$$\left\{\frac{1}{n.(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost je klesající a omezená hodnotou nula.

36. **Je dána posloupnost. Rozhodněte, zda je rostoucí, klesající, omezená.** 2259

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

OK Posloupnost je klesající a omezená hodnotou 1.

37. **Stanovte n-tý člen posloupnosti:** 2271

$$1\ ;\quad -\frac{1}{2}\ ;\quad \frac{1}{3}\ ;\quad -\frac{1}{4}\ ;\quad \ldots$$

OK

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

3. Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost

1, 2, 3, 4, 5, 6, ... , a_{n-1}, a_n, a_{n+1}
V tomto případě platí, že $(a_n - a_{n-1}) = 1$

2, 4, 6, 8, 10, ... , a_{n-1}, a_n, a_{n+1}
V tomto případě platí, že $(a_n - a_{n-1}) = 2$

1, 3, 5, 7, 9, ... , a_{n-1}, a_n, a_{n+1}
V tomto případě platí, že $(a_n - a_{n-1}) = 2$

1, 3/2, 2, 5/2, ... , a_{n-1}, a_n, a_{n+1}
V tomto případě platí, že $(a_n - a_{n-1}) = 1/2$

Ve všech uvedených případech platí, že $a_{n+1} = a_n + d$

Jde o **aritmetické posloupnosti**. Číslu **d** říkáme **diference** aritmetické posloupnosti.

Definice:
Jestliže v posloupnosti $\{a_n\}$ platí rekurentní vzorec $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je dané číslo (tedy konstantní) a nezávislé na n , nazývá se taková posloupnost **aritmetickou posloupností**. Číslo d nazýváme **diferencí.**

Mějme obecně aritmetickou posloupnost
a_1
$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$
.
.
.
$a_n = a_1 + (n - 1)d$

Věta 1:
Pro výpočet n-tého členu aritmetické posloupnosti pomocí prvního členu a diference platí vzorec
$a_n = a_1 + (n - 1)d$, kde n je přirozené číslo.

Věta 2:
Pro dva libovolné členy a_r, a_s aritmetické posloupnosti platí rovnost:
$a_s = a_r + (s - r)d$

Příklad 1:

První dva členy aritmetické posloupnosti jsou 40 a 37. Určete dvanáctý člen.

Řešení:

40, 37, 34, 31, 28, 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, ...

$a_n = a_1 + (n - 1)d$
$a_{12} = 40 + 11.d$
Protože d = -3, pak $a_{12} = 40 + 11.(-3) = 7$

Příklad 2:

V aritmetické posloupnosti známe 10. a 20. člen. Jsou 25, -15 (po sobě). Určete d, a_1, a_{50}.

Řešení:

$a_{10} = a_1 + 9d = 25$
$a_{20} = a_1 + 19d = -15$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Pokud ji vyřešíme, dostaneme $a_1 = 61$, $d = -4$
Pak stačí dopočítat $a_{50} = 61 + 49 . (-4) = -135$

Příklad 3:

Mezi čísla 3,7 a 6,8 máme vložit 9 čísel tak, aby s danými čísly tvořila aritmetickou posloupnost.
Pozn.: Říkáme, že provádíme tzv. interpolaci devíti členů mezi daná dvě čísla.

Řešení:

$a_1 = 3,7$
$a_{11} = 6,8 = 3,7 + 10d$
----
d = 0,31

3,7; 4,01; 4,32; 4,63; 4,94; 5,25; 5,56; 5,87; 6,18; 6,49; 6,80

Věta 3:

V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ platí pro součet s_n jejích prvních n členů následující vzorec:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Příklad 4:

Vypočtěte součet prvních n lichých čísel.

Řešení:

$a_1 = 1$
$a_n = 1 + (n - 1) . 2 = 2n - 1$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2$$

4. Aritmetická posloupnost - procvičovací příklady

1. **Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti je $n + n^2$. Stanovte její diferenci a r-tý člen.** 2283

OK $d = 2$; $a_r = = 2r$

2. **V které aritmetické posloupnosti platí: $a_1 + a_5 = 16$, $a_3 + a_4 = 19$?** 2282

OK $a_n = 3n - 1$

3. **Rozměry kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, měří-li jejich součet 24 cm a objem kvádru je 312 cm^3?** 2292

OK a = 3 cm, b = 8 cm, c = 13 cm

4. **Určete prvních pět členů posloupnosti a dokažte, že se jedná o aritmetickou posloupnost. Stanovte její diferenci a rekurentní vzorec.** 2287
Posloupnost:

$$\left\{\frac{a+n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$a \in R$

OK $d = 0{,}5$, $a_{n+1} = a_n + 0{,}5$, $a_1 = (a + 1)/2$

5. **Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna má délku 24 cm. Jak velké jsou jeho strany a úhly?** 2294

OK a = 18 cm; b = 24 cm; c = 30 cm; $\alpha = 36°52'$; $\gamma = 90°$; $\beta = 53°08'$

6. **Mezi čísla $a_1 = 3$ a $a_n = -9$ vložte tolik členů aritmetické posloupnosti, aby součet prvních n členů byl $s_n = -33$. Určete diferenci této posloupnosti a číslo n.** 2291

OK $d = -1{,}2$; $n = 11$

7. **V aritmetické posloupnosti je dáno: $a_4 = 0$, $a_6 = -4$, $s_n = 12$. Určete n.** 2280

OK 1. řešení je 3, druhé řešení je 4.

8. **Součin tří po sobě následujících členů aritmetické posloupnosti se rovná jejich součtu. Určete tyto tři členy, je-li diference posloupnosti d = 13/3.** 2276

OK 1. řešení:
-13/3; 0; 13/3
2. řešení:
-9; -14/3; -1/3
3. řešení:
1/3; 14/3; 9

9. **Určete a_{n+1}, d, a_{10} aritmetické posloupnosti, je-li dán člen a_n:** 2277

$$a_n = \frac{2-5n}{4}$$

OK

$$d = -\frac{5}{4};\ a_{n+1} = \frac{-3-5n}{4};\ a_{10} = -12$$

10. **Určete prvních pět členů posloupnosti $\{1 + 3n\}$, $n \in N$ a dokažte, že se jedná o aritmetickou posloupnost. Stanovte její diferenci a rekurentní vzorec.** 2288

OK $d = 3$; $a_{n+1} = a_n + 3$; $a_1 = 4$

11. **V aritmetické posloupnosti je dáno: $a_1 + a_4 = 26$, $a_2 + a_5 = 30$. Určete s_{10}.** 2279

OK 190

12. **V aritmetické posloupnosti je dáno: $a_2 + a_5 - a_3 = 10$; $a_1 + a_6 = 17$. Určete a_1 a diferenci d.** 2278

OK $a_1 = 1$; diference $d = 3$

13. **Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 2x - 120 = 0$ vložte deset čísel tak, aby spolu s těmito kořeny vzniklo prvních dvanáct členů rostoucí aritmetické posloupnosti. Určete první člen a_1 a diferenci d.** 2289

OK $a_1 = -10$; $d = 2$

14. **Doplňte zbývající čísla v tabulce:** 2275

a_1	d	n	a_n	S_n
1	$\frac{2}{3}$	100		
0			5	27,5
−6	$\frac{3}{4}$		$15 + \frac{3}{4}$	
	2		−10	−360

OK

a_1	d	n	a_n	S_n
1	$\frac{2}{3}$	100	67	3 400
0	0,5	11	5	27,5
−6	$\frac{3}{4}$	30	$15 + \frac{3}{4}$	$146 + \frac{1}{4}$
−38	2	15	−10	−360

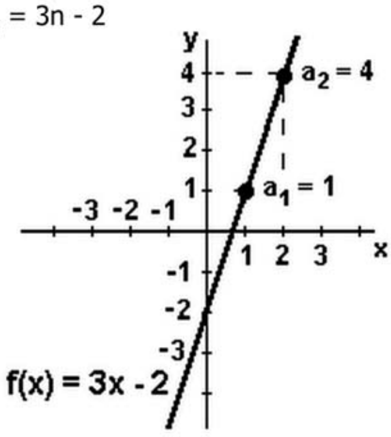
15. **Určete prvních pět členů posloupnosti $\{2 + bn\}$, $n \in N$ a dokažte, že se jedná o aritmetickou posloupnost. Stanovte její diferenci a rekurentní vzorec.** 2286

OK $d = b$

$a_{n+1} = a_n + b$; $a_1 = 2 + b$

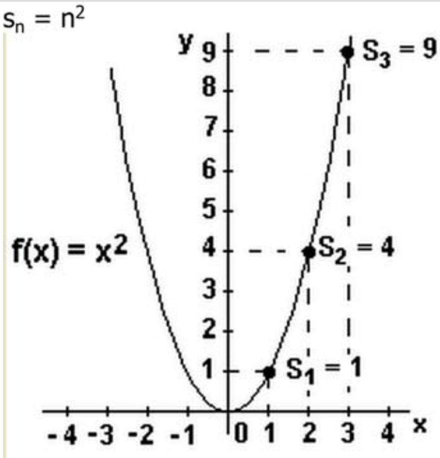
16. **V aritmetické posloupnosti je první člen $a_1 = 1$ a diference $d = 3$. Určete člen a_n a ukažte, že je funkcí počtu členů n. Načrtněte graf této funkce v soustavě pravoúhlých souřadnic.** 2285

OK $a_n = 3n - 2$



17. **V aritmetické posloupnosti je první člen $a_1 = 1$ a diference $d = 2$. Určete součet prvních n členů s_n a ukažte, že je funkcí počtu členů n. Načrtněte graf této funkce v soustavě pravoúhlých souřadnic.** 2284

OK $s_n = n^2$



18. **V aritmetické posloupnosti je prvý člen $a_1 = 3$, diference $d = 2$. Kolik členů dává součet $s_n = 120$?** 2295

OK 10

19. **V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 2$, $d = 3$. Určete nejmenší přirozené číslo n, pro které je $s_n > 100$.** 2290

OK 9

20. **Určete desátý člen aritmetické posloupnosti, ve které $a_2 + a_3 = 9$; $a_2 . a_3 = 14$.** 2281

OK 1. řešení je 42, 2. řešení je (-33)

21. **Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou dlouhé, je-li obsah 6 dm²?** 2293

OK Délky stran mají velikost: a = 3 dm, b = 4 dm, c = 5 dm.

5. Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
Zde platí: $a_2 = 2a_1$ $a_3 = 2a_2$ atd.

1, 1/3, 1/9, 1/27, ...

Zde platí: $a_2 = (1/3)a_1$ $a_3 = (1/3)a_2$ atd.   obecně $a_n = (1/3)a_{n-1}$

Následující člen je vždy nějakým násobkem členu předcházejícího.

Definice:
Jestliže v posloupnosti $\{a_n\}$ platí rekurentní vzorec $a_{n+1} = a_n \cdot q$, kde q je dané číslo nezávislé na n (= konstanta), nazýváme takovou posloupnost **geometrickou posloupností**. Číslo q nazýváme **kvocientem** geometrické posloupnosti.

$a_2 = a_1 \cdot q$
$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$
$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$
.
.
.
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Věta 1:
Pro výpočet n-tého členu geometrické posloupnosti z prvního členu a z kvocientu platí vzorec $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, kde n je přirozené číslo.

Věta 2:
Pro libovolné dva členy a_r, a_s geometrické posloupnosti platí rovnost:
$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

Věta 3:
Součet prvních n členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ je určen vzorcem:

$$s_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ kde $q \neq 1$

Pozn.: Je-li $q < 1$, pak je vhodné použít vztahu $$s_n = a_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Je-li $q = 1$, pak dostáváme posloupnost $a_1, a_1, a_1, \ldots$ a pro součet prvních n členů pak platí: $s_n = n.a_1$

Příklad 1:

Je dáno $a_8 = -40$, $a_9 = -80$. Určete příslušnou geometrickou posloupnost.
Pozn.: Určit geometrickou posloupnost znamená zapsat její 1. člen a kvocient.

Řešení:

$a_8 = a_1 \cdot q^7 = -40$
$a_9 = a_1 \cdot q^8 = -80$

Získali jsme soustavu rovnic. Při jejím řešení je vhodné použít postup, že druhou rovnici vydělíme rovnicí první. Dostaneme tak $q = 2$ a dosazením do jedné z rovnic pak vypočteme, že $a_1 = -5/16$

Příklad 2:

Najděte 4 čísla, která tvoří část geometrické posloupnosti o součtu 360, víte-li, že poslední číslo je 9krát větší než druhé číslo. Určete danou posloupnost.

Řešení:

$n = 4$
$s_n = 360$

$a_4 = 9 \cdot a_1 \cdot q$

$$360 = a_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1}$$

$9 \cdot a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^3$

Z druhé rovnice $q_1 = +3$ $q_2 = -3$
Po dosazení do rovnice první dostáváme
$(a_1)_1 = 9$
$(a_1)_2 = -18$

Hledané posloupnosti tedy mohou být dvě, a to:
9, 27, 81, 243
-18, 54, -162, 486

6. Geometrická posloupnost - procvičovací příklady

1. **Povrch kvádru je 78 cm², součet jeho tří různých rozměrů je 13 cm. Jak velký je jeho objem, tvoří-li rozměry tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?** 2311

OK $27\ cm^3$

2. **Délky hran kvádru tvoří geometrickou posloupnost. Objem V = 216 cm³. Součet délek hran, vycházejících z jednoho vrcholu, je 21 cm. Určete délky hran.** 2307

OK a = 12, b = 6, c = 3

3. **V geometrické posloupnosti je $a_2 = a$; $a_5 = b$. Určete jedenáctý člen.** 2302

OK

$$a_{11} = \frac{b^3}{a^2};\ a \neq 0, b \neq 0$$

4. **Součet prvních čtyř po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 80. Určete ji, jestliže $a_4 = 9a_2$.** 2310

OK Úloha má tři řešení:
1) $a_1 = 80$; $q = 0$
2) $a_1 = -4$; $q = -3$
3) $a_1 = 2$; $q = 3$

5. **Mezi čísla 2 a 486 vložte čtyři čísla tak, aby spolu s danými čísly vzniklo šest po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti. Určete je.** 2303

OK 2, 6, 18, 54, 162, 486

6. **V geometrické posloupnosti, v níž je $a_1 = 3$, určete všechna q tak, aby $s_3 \leq 21$.** 2304

OK q ∈ <-3; 2>

7. **Je dán čtverec, jehož strana má délku a. Spojíte-li středy jeho stran, dostanete nový čtverec, spojíte-li středy stran tohoto nového čtverce, dostanete zase čtverec, atd. Jak velký je obsah čtverce, který vznikne desátým dělením?** 2312

OK $s_{10} = a^2/1024$

8. **Jak velký je pátý člen geometrické posloupnosti, ve které platí: $a_1 + a_4 = 56$; $a_2 + a_3 = 24$?** 2300

OK 1. řešení: 162
2. řešení: 2/3

9. **V geometrické posloupnosti je $a_2 - a_1 = 15$; $a_3 - a_2 = 60$. Určete s_4.** 2313

OK 425

10. **V geometrické posloupnosti je $a_1 + a_2 + a_3 = 35$; $a_4 + a_5 + a_6 = 280$. Určete prvních šest členů posloupnosti.** 2301

OK $a_1 = 5$; $a_2 = 10$; $a_3 = 20$; $a_4 = 40$; $a_5 = 80$; $a_6 = 160$

11. **Doplňte zbývající čísla v tabulce:** 2297

a_1	q	n	a_n	S_n
1	3	10		
	$\frac{1}{2}$	8	2	
2		7	1458	
	3		567	847

OK

a_1	q	n	a_n	S_n
1	3	10	19 683	29 524
256	$\frac{1}{2}$	8	2	510
2	3	7	1458	2186
7	3	5	567	847

12. **Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, jestliže platí: $a_1 - a_2 + a_3 = 15$; $a_4 - a_5 + a_6 = 120$.** 2299

OK $a_1 = 5$, $q = 2$

13. **Doplňte zbývající čísla v tabulce:** 2296

a_1	q	n	a_n	S_n
$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{128}$	$\frac{127}{128}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6561}$	
	−2	19	262 144	
	−3	4	121,5	

OK

a_1	q	n	a_n	S_n
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	7	$\frac{1}{128}$	$\frac{127}{128}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	8	$\frac{1}{6561}$	$\frac{3280}{6561}$
1	−2	19	262 144	174 763
−4,5	−3	4	121,5	90

14. **Přičteme-li k číslům x, y, z stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete v této posloupnosti součet s_4, je-li $x = 2$, $y = 16$, $z = 58$.** 2309

OK 280

15. **Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, jestliže platí: $a_1 - a_2 + a_3 = 18$, $a_4 - a_5 + a_6 = 144$.** 2298

OK $a_1 = 6$, $q = 2$

16. **Přičteme-li k číslům x, y, z stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete v této posloupnosti součet s_4, je-li $x = -6$, $y = 15$, $z = 99$.** 2308

OK 595

17. **V geometrické posloupnosti je: $q = 2$; $a_n = 16/3$; $s_n = 21/2$. Určete počet členů n.** 2305

OK 6

18. **V geometrické posloupnosti je dáno: $a_1 = 64$; $q = 0{,}5$; $a_n = 8$. Určete n, s_n.** 2306

OK $n = 4$
$s_n = 120$

19. **Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby vznikla geometrická posloupnost, v níž součet vložených čísel je 630.** 2314

OK Vložená čísla: 10, 20, 40, 80, 160, 320

20. **Mezi kořeny rovnice $x^2 - 9x + 8 = 0$ vložte dvě čísla tak, aby vznikly čtyři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Vypište je.** 2315

OK 1. řešení: 1, 2, 4, 8
2. řešení: 8, 4, 2, 1

Obsah