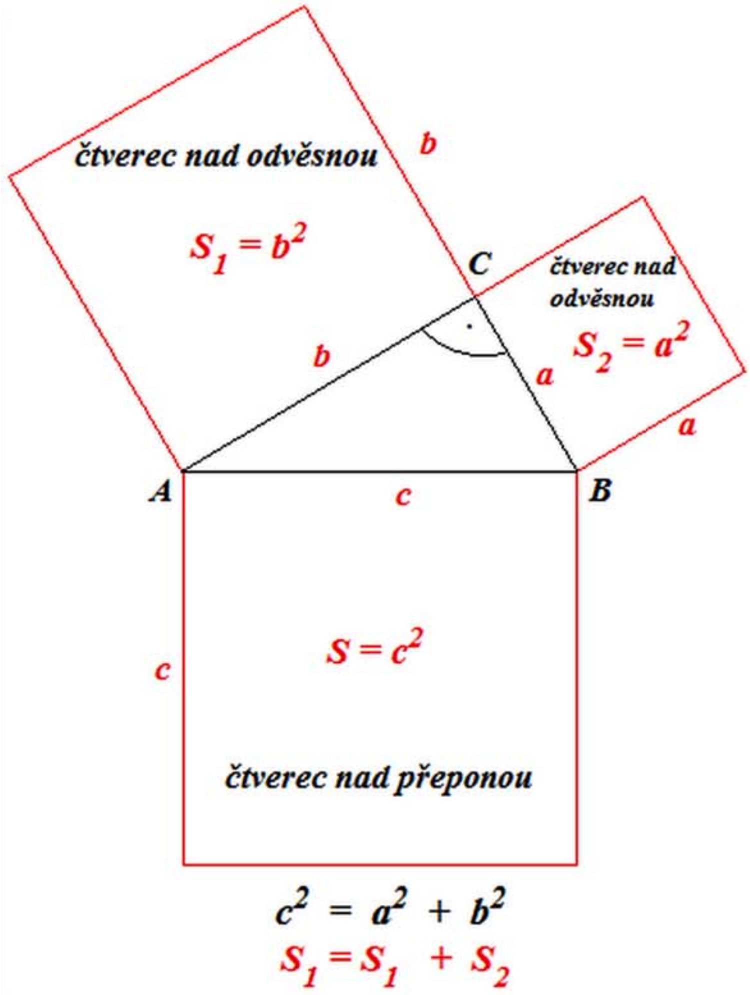
Variace

1

Pythagorova věta pro studijní obory

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

1. Pythagorova věta - studijní obory

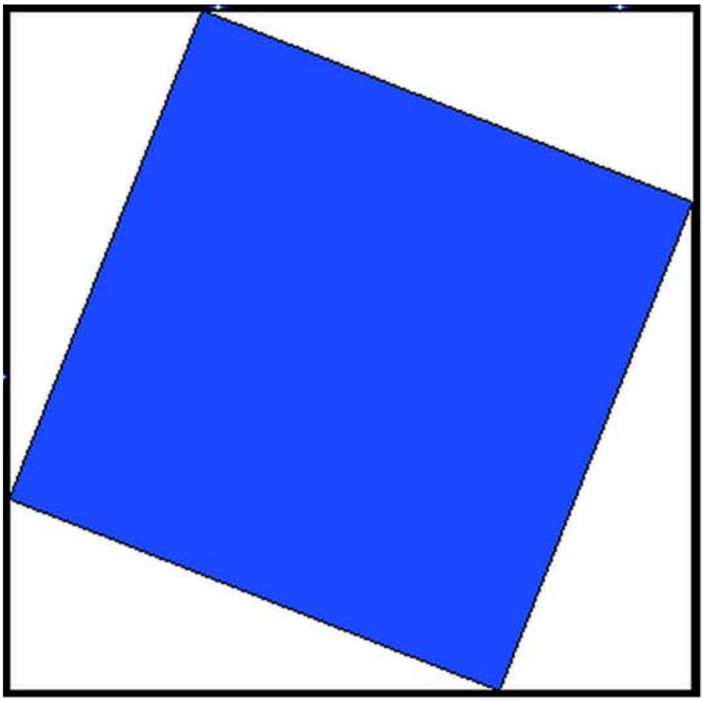


Věta: **Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami.**

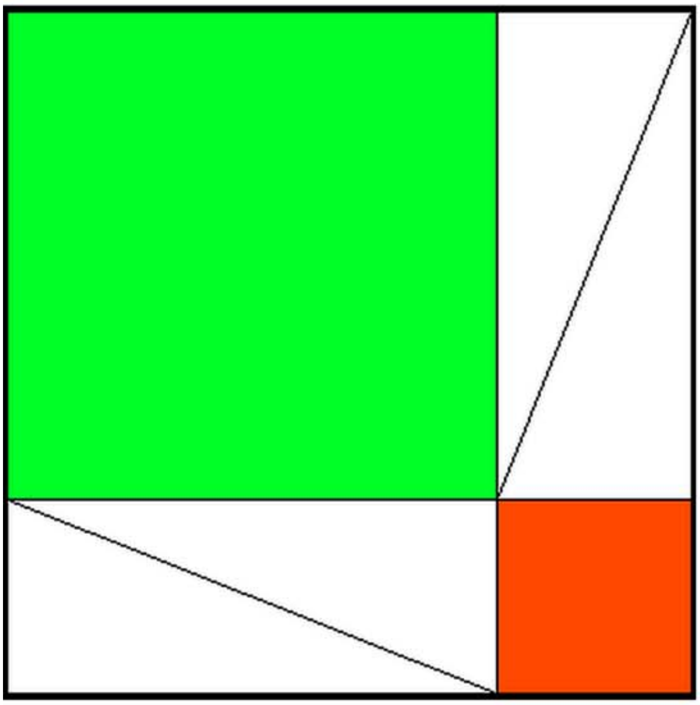
Důkaz:

1. způsob:

Pravoúhlý trojúhelník (bílá barva) a jeho tři kopie můžeme uspořádat do tvaru čtverce o straně odpovídající součtu odvěsen. Modře vybarvený čtverec uvnitř má obsah čtverce nad přeponou.



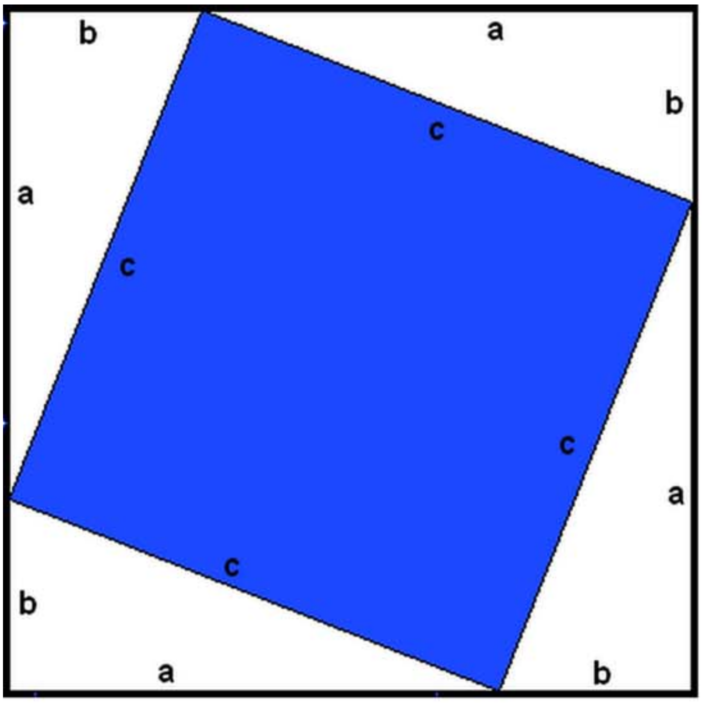
Důvtipným přeskupením jednotlivých obrazců dostaneme následující obrázek:



Velikost strany velkého čtverce se nezměnila - jedná se o součet velikostí odvěsen trojúhelníku. Počet ani velikost pravoúhlých trojúhelníků se také nezměnila. Zbylá plocha (zelená a oranžová) tedy musí být stejná, jako plocha modrého čtverce. Nyní je ale rozdělena do dvou čtverců: zelený, se stranou delší odvěsny a oranžový se stranou odvěsny kratší. Jejich součet je roven čtverci nad přeponou.

2. způsob:

Využijeme první obrázek z předchozího výkladu:



Obsah velkého čtverce lze vyjádřit $(a + b)^2$

Obsah velkého čtverce je ale roven součtu obsahů modrého čtverce ($= c^2$) a čtyř obsahů bílých trojúhelníků ($= a \,.\, b / 2$)

Platí tedy:

$(a + b)^2 = c^2 + 4 \,.\, a \,.\, b / 2$

Po úpravě:

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

Odtud tedy: $c^2 = a^2 + b^2$

CBD

3. způsob:

Na základě Eukleidovy věty o odvěsně platí:

$a^2 = c \,.\, c_a$

$b^2 = c \,.\, c_b$

Sečteme-li pravé i levé strany obou rovnic, dostáváme:

$a^2 + b^2 = c \,.\, c_a + c \,.\, c_b = c \,.\, (c_a + c_b) = c \,.\, c = c^2$

CBD

Platí také **věta obrácená:**

Věta: **Platí-li o stranách trojúhelníka ABC předpoklad, že $c^2 = a^2 + b^2$, pak jde o pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C.**

Důkaz:

Zvolme pravoúhlý trojúhelník A´B´C´takový, aby při vrcholu C´ byl pravý úhel. Nechť jeho odvěsny jsou shodné se stranami AC a BC daného trojúhelníka ABC. Platí tedy:

a´ = a

b´ = b

Pro přeponu trojúhelníka A´B´C´platí Pythagorova věta:

$c'^2 = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 = c^2$

Z toho vyplývá, že

c´ = c

Trojúhelník ABC je pak shodný s trojúhelníkem A´B´C´(sss), proto i vnitřní úhel při vrcholu C´(který je pravý) je roven vnitřnímu úhlu při vrcholu C. I ten je tedy pravý a to jsme měli dokázat.

Ukázkové příklady:

Příklad 1:

Rozhodněte, zda trojúhelník daný třemi stranami o délkách 4 cm, 5 cm, 6 cm je pravoúhlý.

Řešení:

a = 4 cm

b = 5 cm

c = 6 cm

c´= ? [cm]

Podle Pythagorovy věty vypočteme pomocí předpokládaných odvěsen (tj. kratších stran) a, b délku pomyslné přepony c´. Pokud bude platit c´ = c, pak je původní trojúhelník pravoúhlý.

$$c' = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \neq 6$$

Závěr tedy zní: Zadaný trojúhelník není pravoúhlý.

2. Pythagorova věta - procvičovací úlohy

1. **Uvnitř kruhu o poloměru r = 13 cm je bod M vzdálený od středu kruhu 5 cm. Bodem M je vedena tětiva |AB| = 25 cm. Určete délky úseček, na které je rozdělena úsečka AB bodem M.** 2061

OK Úsečka AB je rozdělena na dvě části o délkách 16 cm a 9 cm.

2. **Určete výšku rovnoramenného trojúhelníku ABC, je-li délka jeho základny 4,6 cm a délka jeho ramene 9,7 cm.** 3015

OK 9,42 cm

3. **Jaký je obvod kosočtverce, jehož úhlopříčky jsou e = 31,6 dm, f = 3,98 m?** 3012

OK 101,6 dm

4. **Pole má tvar rovnostranného trojúhelníku o délce strany 1 km. Jak je dlouhá nejdelší přímá meliorační brázda, která je kolmou spojnicí nejvýše položeného vrcholu s protější stranou?** 3016

OK 866 m

5. **Jaká je délka strany kosočtverce, jehož úhlopříčky jsou e = 31,6 dm, f = 3,98 m?** 3011

OK 25,4 dm

6. **Vypočti obvod pravoúhlého lichoběžníku ABCD s pravým úhlem při vrcholech A, D, jestliže délka AB je 15,0 cm, délka AD je 2,0 cm |CD| : |AB| = 1 : 5.** 3014

OK 32,76 cm

7. **Anténní stožár je 24 m vysoký. Je upevněn čtyřmi ocelovými lany zavěšenými 1,5 m pod nejvyšším bodem stožáru a ukotvenými na zemi ve vrcholech čtverce o délce strany 12 m. Stožár je vztyčen ve středu tohoto čtverce. Vypočtěte celkovou délku ocelových lan, jestliže na upevnění každého z nich je nutno přidat 1,1 m.** 3017

OK 100,6 m

8. **V trojúhelníku ABC je a = 13 cm, b = 14 cm, c = 15 cm. Vypočtěte výšku v_b.** 2062

OK 12 cm

9. **Známe délku strany, těžnice a výšky trojúhelníku ABC; |AB| = 6 cm, v_c = 1,6 cm, t_c = 2 cm. Vypočtěte délky dalších dvou stran trojúhelníku ABC.** 2058

OK a = $\sqrt{20{,}2}$ cm, b = $\sqrt{5{,}8}$ cm

10. **Tyč délky 5 m je opřena o zeď. Jak daleko od zdi se spodní konec tyče opírá o zem, jestliže horní konec tyče sahá na zdi do výšky 4,8 m.** 2067

OK 1,4 m

11. **Rovnostranný trojúhelník ABC má délku strany 7 cm. Vypočtěte velikost jeho výšky.** 2065

OK 6,06 cm

12. **Určete stranu obdélníka, je-li jeho úhlopříčka 1 cm a druhá strana 4/5 cm.** 2066

OK 0,6 cm

13. **Jaký je obsah kosočtverce, jehož úhlopříčky jsou e = 31,6 dm, f = 3,98 m?** 3013

OK 628,84 dm^2

14. **Vypočtěte délky stran pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou c, jestliže těžnice t_a = 10 a těžnice t_b = 4$\sqrt{10}$.** 2059

OK a = 12, b = 8, c = 4$\sqrt{13}$

15. **Ke kružnici k(S; 4 cm) jsou vedeny tečny z bodu K, přičemž |SK| = 9 cm. Vypočtěte vzdálenost středu S od úsečky spojující body dotyku kružnice s tečnami.** 2057

OK 1,78 cm

16. **Vypočtěte poloměr kružnice vepsané do kosočtverce, jehož strana je bodem dotyku rozdělena na úsečky dlouhé 6 cm a 4 cm.** 2056

OK 4,9 cm

17. **V kružnici o poloměru r = 13 je vedena tětiva délky d = 10. Určete její vzdálenost x od středu kružnice.** 2060

OK 12

18. **Obdélníkové hřiště je 92 m dlouhé a 61 m široké. Načrtněte, jakým způsobem musí hráč přeběhnout hřiště, aby urazil uvnitř hřiště nejdelší přímou dráhu. Určete tuto vzdálenost a zaokrouhlete ji na celé metry.** 2064

OK 110 m, přeběhnout musí po úhlopříčce obdélníkového hřiště

19. **Určete obsah obdélníka, jehož délka je a = 84 cm, má-li jeho úhlopříčka délku o 72 cm větší než je jeho šířka.** 2063

OK 1 092 cm^2

Obsah